UNIVERSITE MOULAY ISMAIL FACULTE DES SCIENCES DEPARTEMENT DE PHYSIQUE MEKNES	A.U : 2019-2020 SEMESTRE II Master degree Nanophysics and Advanced Optics

algèbre de Boole, simplification des fonctions logiques

Pr A. ROUKHE

Sommaire

Chapitre 1 Eléments d’ Algèbre de Boole

Chapitre 2 Les Fonctions Logiques

Chapitre 3 Minimisation des Fonctions Logiques

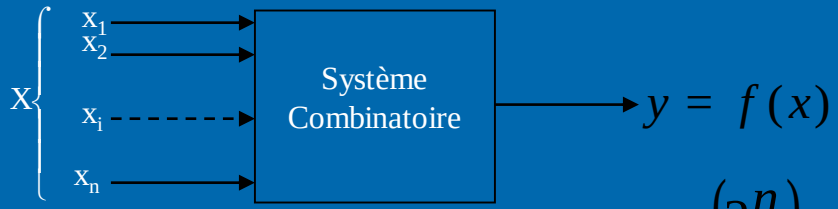
Chapitre 4 Logique Séquentielle.

Chapitre 2 Les Fonctions Logiques

I/ - Fonction Booléennes

1- Fonction Logique Simple

Une fonction logique simple de n variables est une application, qui à toute combinaison $x \in B_2^n$ fait correspondre une élément $y \in B_2$. Elle sera notée $y = f(x)$



le nombre de fonctions simples de n variables est $2^{(2^n)}$, puisque à chacune des 2^n combinaison on peut faire correspondre l'une des valeurs (0,1).

- l'ensemble des points vrais :

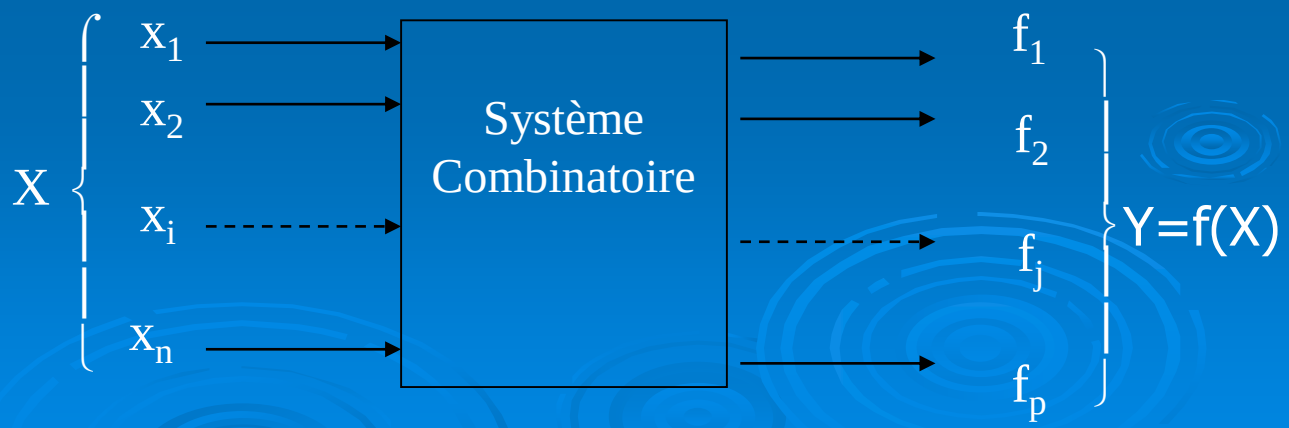
c'est l'ensemble des combinaison $X_i \in B_2^n$ tels que $f(X_i) = 1$

- l'ensemble des points faux :

c'est l'ensemble des combinaison $X_j \in B_2^n$ tels que . $f(X_j) = 0$

2- Fonction Logique multiple ou générale

C'est une application qui à toute combinaison $X \in B_2^n$ fait correspondre un élément $Y \in B_2^p$ on la note Y=f(X)



3 - Fonction ϕ - Booléenne.

Une quantité ϕ - Booléenne simple est une quantité susceptible de prendre trois valeurs 0, ϕ ou 1. $0<\phi<1$.

Exemple

x1	x2		f
0	0		0
0	1		ϕ
1	0		1
1	1		0

$$\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} < \begin{Vmatrix} 0 \\ \varphi \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} < \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$$x_1 \oplus x_2 = \bar{x}_1 . x_2 + x_1 . \bar{x}_2$$

$f_m < f < f_M$

f_m: borne inférieure

f_M: borne supérieure.

II/ Représentation des fonctions

1. Table de vérété

C'est l'écriture directe sous forme tabulaire da la correspondance définie par la fonction. B_2^n et B_2^p

Les variables d'entrée de B_2^n sont données en général dans l'ordre naturel denumération en base 2.

On convient dans ce qui suit d'affecter aux colonnes les variables dans l'ordre des indices croissants x_1, x_2, x_3, .., x_n.

Exemple

ND	x_1 x_2 x_3	f	$\bar{f}$
0	0 0 0	0	1
1	0 0 1	0	1
2	0 1 0	0	1
3	0 1 1	1	0
4	1 0 0	0	1
5	1 0 1	1	0
6	1 1 0	1	0
7	1 1 1	1	0

2 Table de Karnaugh

Un tableau de Karnaugh est un tableau de vérité dans lequel les différentes possibilités des entrées sont classées en code GRAY (binaire réfléchi). Ceci correspond à 0 puis 1 dans le cas

d'une variable, 00, 01, 11, 10 pour 2 variables. On peut remarquer qu'en passant d'une case à une case adjacente, une seule variable a changé. Regrouper ces deux cases adjacentes correspond donc à la simplification par cette variable (du fait de l'axiome de complémentation). On simplifie l'équation d'une fonction en faisant des regroupements sous forme d'une, deux ou quatre lignes ou colonnes. Le passage de la dernière ligne à la première est également un cas adjacent (idem pour les colonnes).

Diagramme de Veitch

Le diagramme de Veitch est une table sur laquelle on représente les *n* variables d'entrée selon les deux axes vertical et horizontal. En général, pour *n* = *p*+*q* on porte sur les colonnes *p* variables où *p* est la partie entière de *n*/2, et les *q* variables restantes sur les lignes. Les colonnes et les lignes sont numérotées selon l'ordre binaire naturel.

Le diagramme de Veitch de l'exemple précédent de la fonction f à trois variable (x1 x2 x 3) est le suivant :

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

Fonction à 4 variables

N_D	x_1 x_2 x_3 x_4	f
0	0 0 0 0	0
1	0 0 0 1	1
2	0 0 1 0	1
3	0 0 1 1	0
4	0 1 0 0	1
5	0 1 0 1	1
6	0 1 1 0	1
7	0 1 1 1	0
8	1 0 0 0	1
9	1 0 0 1	1
10	1 0 1 0	0
11	1 0 1 1	1
12	1 1 0 0	1
13	1 1 0 1	1
14	1 1 1 0	1
15	1 1 1 1	0

x_1 x_2 \ x_3 x_4	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	1	1	0	1
11	1	1	0	1
10	1	1	1	0

Remarque : Les combinaisons placées sur les entrées d'une table de Karnaugh correspondent à la suite des mots du code binaire réfléchi où (code de Gray).

3- représentation numérique.

Une combinaison peut être considérée comme la représentation en base 2 d'un nombre N. Il est souvent commode de donner la combinaison considérée par la représentation de N dans une autre base. La base décimale est la plus utilisée.

Exemple.

$$f = R_1(3,5,6,7)_{10} = R_1(011,101,110,111)_2$$

R_1: représente les points varies de la fonction f.

Soit

$$f = R_0(0,1,2,4)_{10} = R_0(000,001,010,100)_2$$

R_0 : représente les points faux de la fonction f.

Dans le cas d'une fonction Φ- Booléenne, on définit la fonction par R_1 , R_0 et R_Φ

R_Φ: représente l'ensemble des points non spécifiés.

4- Représentation spatiale.

Soit X un ensemble de n variables logiques (x_1 , x_2 , ……., x_n).

Chaque combinaison de X est un élément de B_2^n .

Dans un espace à n dimension, on peut considérer chaque combinaison comme les coordonnées d'un point de cet espace.

Ces points constituent les sommets d'un hypercube à n dimension.

Une fonction simple correspondants aux points varis de la fonction.

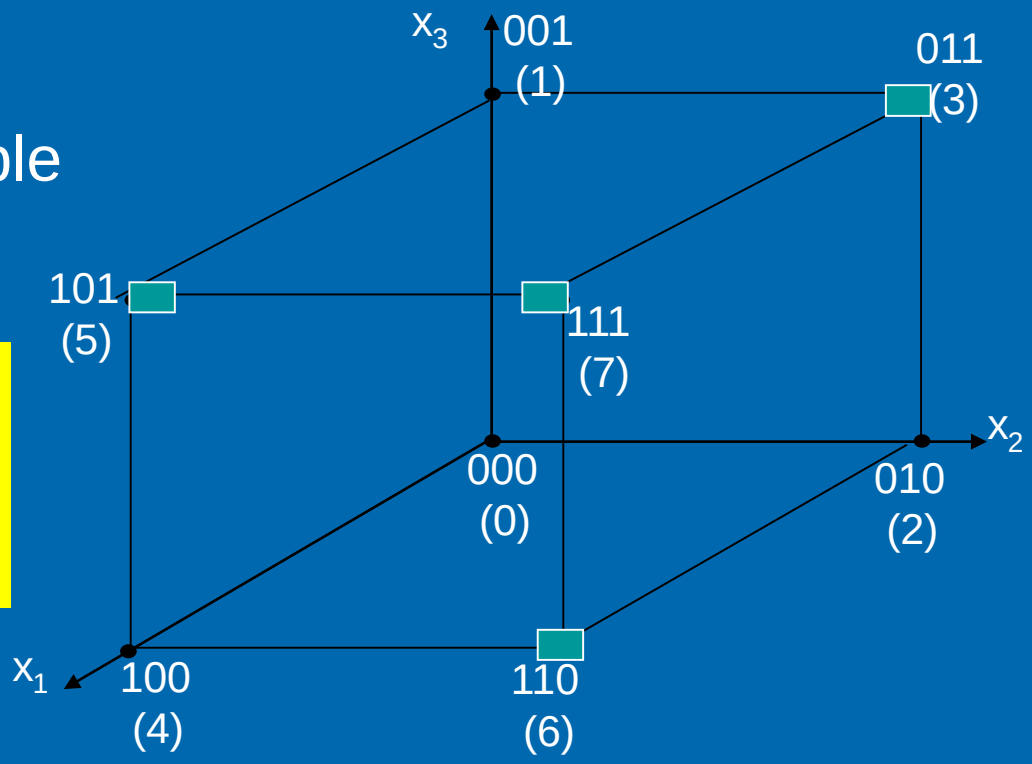
Cette représentation n'est vraiment pratique que pour $n \leq 3$.

Exemple. N=3.

Soit une fonction logique simple définie par ses points vrais.

$$f = \bar{x}_1\, x_2\, x_3 + x_1\, \bar{x}_2\, x_3 + x_1\, x_2\, \bar{x}_3 + x_1\, x_2\, x_3$$

N_D	x_1 x_2 x_3	f
0	0 0 0	0
1	0 0 1	0
2	0 1 0	0
3	0 1 1	1
4	1 0 0	0
5	1 0 1	1
6	1 1 0	1
7	1 1 1	1



III) Produits fondamentaux et forme canonique

Définition : On appelle *produit fondamental* ou *Minterme*, tout produit qui contient *toutes* les variables booléennes complémentées ou non.

Formes Standard et Canoniques

Terme Produit :Un produit logique est une fonction **ET** *ie* $\bar{x}\,y\,\bar{z}$

Terme Somme: Une somme logique est une fonction **OR** *ie* $\bar{x} + y + \bar{z}$

Écriture des équations logiques

Définitions : Apparition d'une variable = Produit de variables sous forme simple ou complémentées = Monôme

Somme de monômes = Polynôme

III.1Minterms et Maxtermes

III.1.1) **Minterme**

- Un **Minterme est** un terme produit dans lequel toutes les variables apparaissent exactement une seule fois.
- Chaque **Minterme** représente une combinaison de variables binaires dans la table de vérité. Les variables sont avec ($\bar{}$) si elles ont « 0 » dans la table de vérité et vice versa.
- Il existe $\mathbf{2^n}$ Mintermes (produits standards) distincts pour **n** variables.
- Le symbole « $\mathbf{P_j}$ » est utilisé pour représenter un Minterme particulier
- **J** est égale au décimal équivalent pour lequel le Minterme possède la valeur 1 dans la table de vérité.

Exemple n = 4 variables { a,b,c,d }

$m = abcd$ est un Minterme

$m = \bar{a}\bar{b}cd$ est un autre Minterme

$m = a\bar{b}c$ n'est pas un Minterme

III.1.2) Maxtermes

- Un **Maxterme** est un terme somme dans lequel toutes les variables apparaissent exactement une seule fois.
- Chaque **Maxterme** représente une combinaison de variables binaires dans la table de vérité. Les variables sont avec ($\bar{}$) si elles ont « 0 » dans la table de vérité et vice versa.
- Il existe $\mathbf{2^n}$ Maxtermes (sommes standards) distincts pour **n** variables.
- Le symbole ‘$\mathbf{S_j}$‘ est utilisé pour représenter un Maxterme particulier
- **J** est égale au décimal équivalent pour lequel le Maxterme possède la valeur ‘0’ dans la table de vérité.

Exemple n=4 variables { a, b, c, d}

$M = a + b + c + d$ est un maxterme

$M = \bar{a} + \bar{b} + c + d$ est un autre maxterme

$M = a + \bar{b} + c$ n'est pas un maxterme

1 – Monôme d'une fonction expressions $\Sigma\ \pi$ d'une fonction.

Soit une fonction f(x). un monôme de f(x) est une quantité logique

$$M = A_P \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \ldots\ldots \tilde{x}_N$$

Avec A_p : Coefficient du monôme et $\tilde{x}_i$: peut être x_i ou $\bar{x}_i$

Si p=n (dimension de l'espace ⟹ Monôme canonique Terme p Minterme

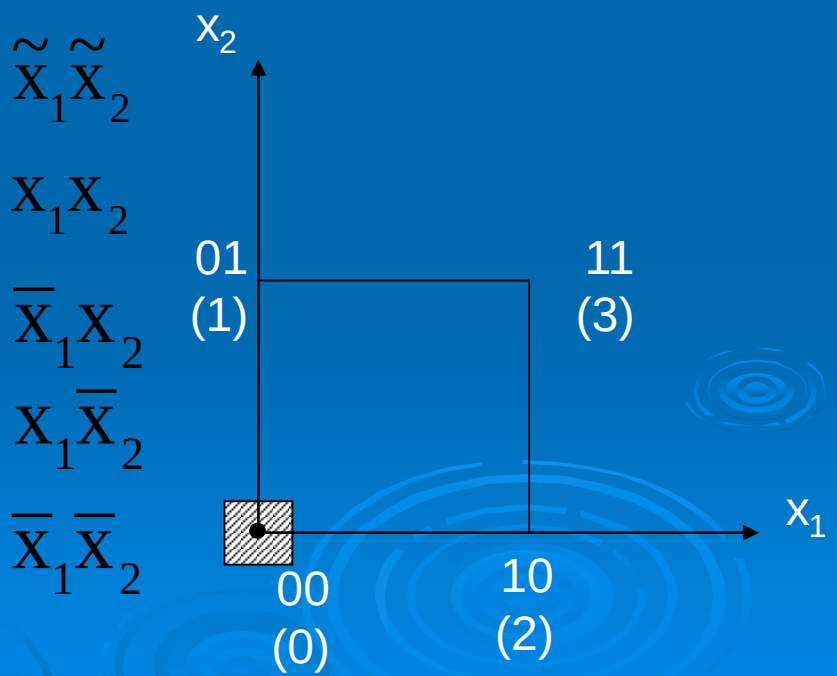
p : degré du monôme.

2 - Exemple.

Soit une fonction de deux variable (x1, x2)

Tout monôme canonique

Un monôme canonique couvre un sommet et un seul dans l'hypercube.



1. Mônal d'une fonction expressions π Σ d'une fonction.

c'est une quantité logique de la forme

$$N_p = B_p + \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + ... + \tilde{x}_P$$

Avec B_p : constante logique et p : degré du mônal

si p=n (dimension de l'espace) ⟹ Monal canonique Terme S Maxterme

2 Exemple.

Soit une fonction de deux variable (x1, x2)

Tout mônal canonique :

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \bar{x}_1(x_2 + \bar{x}_2) + \bar{x}_2(x_1 + \bar{x}_1)$$

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \bar{x}_1 x_2 + \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_2 x_1 + \bar{x}_2\bar{x}_1$$

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 + \bar{x}_1\bar{x}_2$$

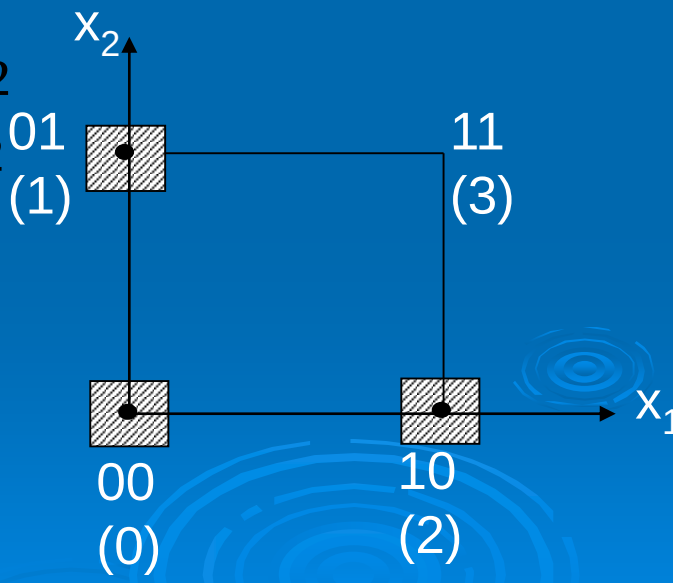
$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$

$x_1 + x_2$ 01 (1)

$\bar{x}_1 + x_2$

$x_1 + \bar{x}_2$

$\bar{x}_1 + \bar{x}_2$

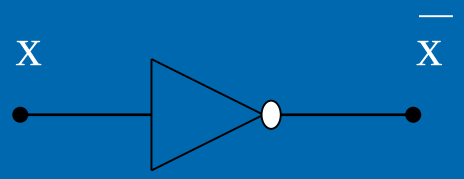


Un mônal canonique couvre tous les sommets sauf un seul dans l'hypercube.

4- Les opérateurs logiques

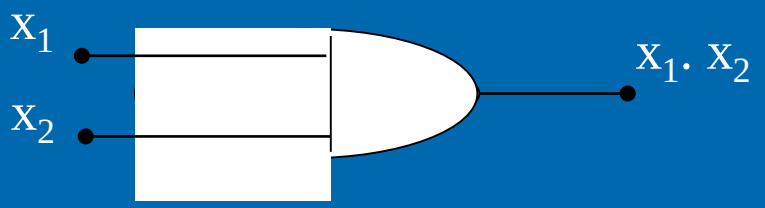
Opérateur NON

x		$\overline{x}$
0		1
1		0



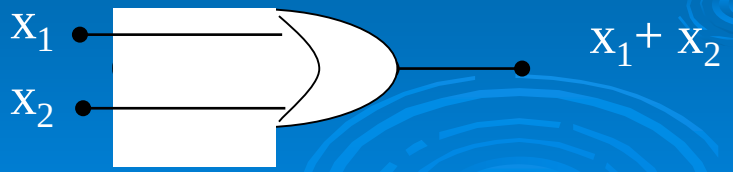
Opérateur ET/ AND

$x_1 x_2$		$x_1 \bullet x_2$
0 0		0
0 1		0
1 0		0
1 1		1



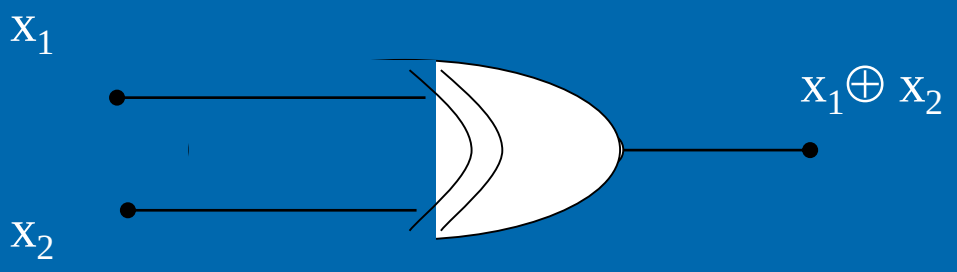
Opérateur OU/ OR

$x_1 x_2$		$x_1 + x_2$
0 0		0
0 1		1
1 0		1
1 1		1



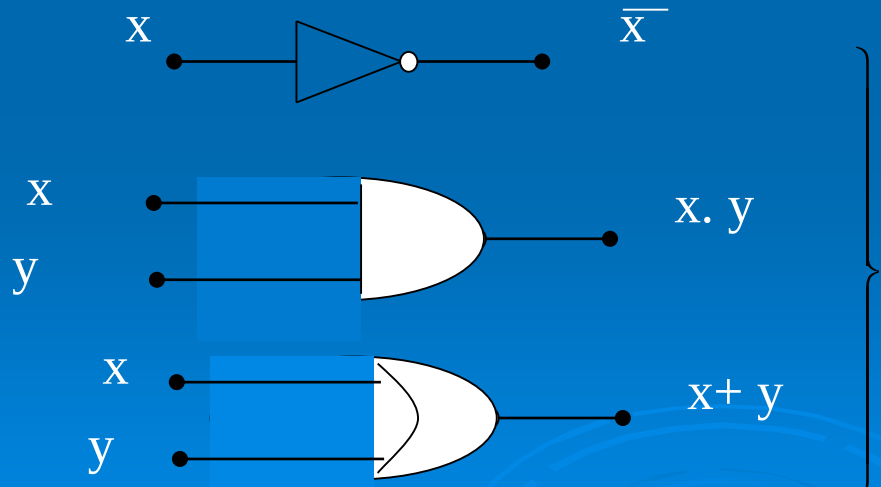
Opérateur Ou Exclusif

x_1	x2	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



5- Représentation de fonctions par des opérateurs.

Définition. Un groupe complet d'opérateurs (G.C.O) est un ensemble d'opérateur qui permet de représenter toutes les fonctions logiques.



Groupe Complet d'Opérateurs

Toute fonction logique peut être représentée par un logique complet d'opérateurs

5 Procédure de Conception de Circuits Combinatoires

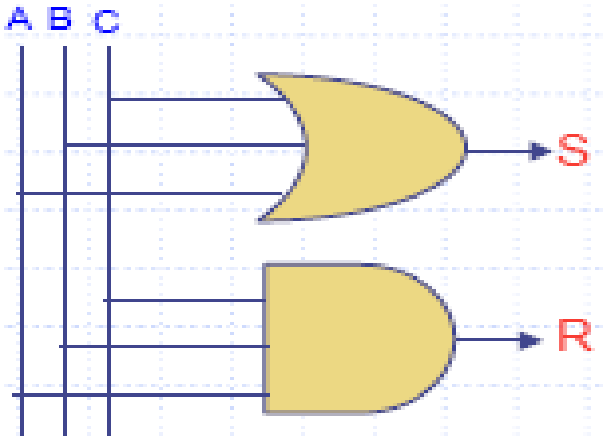
Pour concevoir un circuit digital à partir des spécifications (selon Mano), il convient de suivre ces étapes:

1. Déterminer le nombre des entrées et sorties requises.
2. Établir la table de vérité
3. Obtenir les expressions Booléennes simplifiées
4. Dessiner le diagramme logique et vérifier s'il est correcte (s'il répond aux spécifications)

A	B	C	R	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

$S = A + B + C$

$R = ABC$



Chapitre III
Minimisation des Fonctions Logiques

I/ - Introduction

Minimiser ou optimiser une fonction logique, c'est rechercher une écriture de la fonction comportant le minimum de lettres et de termes.

c.à.d En pratique

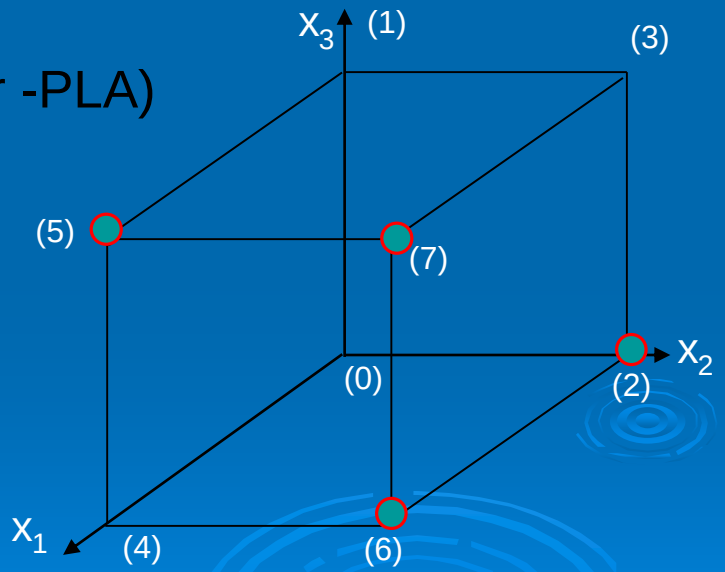
- Minimiser le matériel utilisé pour réaliser la fonction logique (minimum de portes logique
- Minimiser la place mémoire (microprocesseur -PLA)

Exemple.
Soit la fonction logique définie par :

$$f = R_1(2,5,6,7)$$

$$f = f(x_1, x_2, x_3)$$

$$f = \bar{x}_1 \; x_2 \; \bar{x}_3 + x_1 \; \bar{x}_2 \; x_3 + x_1 \; x_2 \; \bar{x}_3 + x_1 \; x_2 \; x_3$$



Pour simplifier f, on prend deux sommets voisin et de proche en proche, minimise f.

$$f = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 (\bar{x}_3 + x_3)$$

ou bien

$$f = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 x_3$$

.

$$f = x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_3$$

On a pu minimiser f, car (5 et 7) et (2,6) sont voisin ou adjacents.

On distingue essentiellement trois méthodes de minimisation.

1. Méthode tabulaire (Karnaugh)
2. Méthode linéaire (Quine Mc. Cluskey)
3. Méthode algébrique (Consensus)

Les méthodes de Karnaugh et de Quine Mc Cluskey

Utilisent les formes canoniques de la fonction et les méthodes des

Consensus utilise des formes quelconques de la fonction logique.

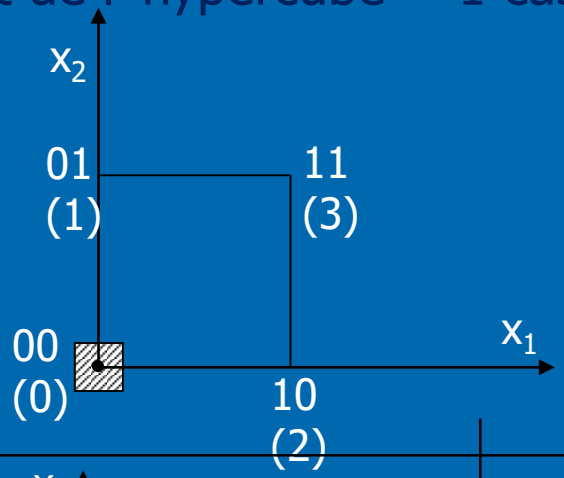
II/ - Méthode Karnaugh)

Principe. C' est la représentation plan de l' hypercube.

Conserve la notion d' adjacence.

1 sommet de l' hypercube = 1 case de la table.

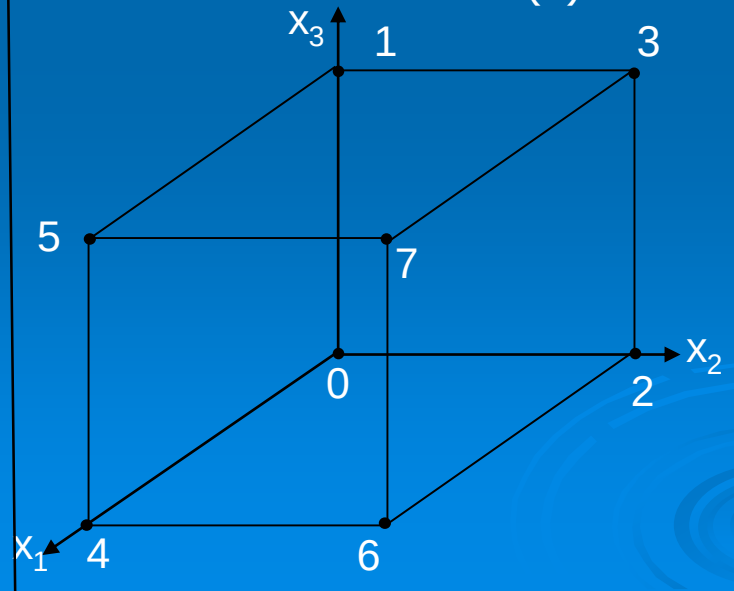
Exemples.



x_1 \ x_2	0	1
0	0	1
1	2	3

x_2 (columns), x_1 (rows)

2^2 Cases



x_1 \ x_2 x_3	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

x_2 x_3 (columns), x_1 (rows)

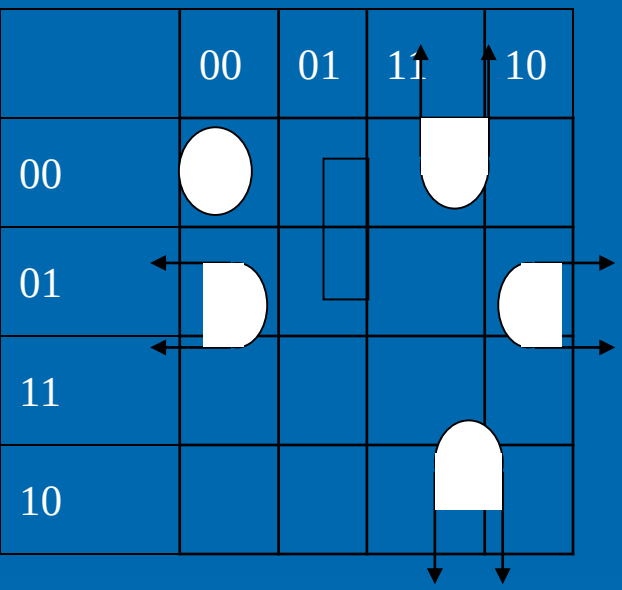
2^3 Cases

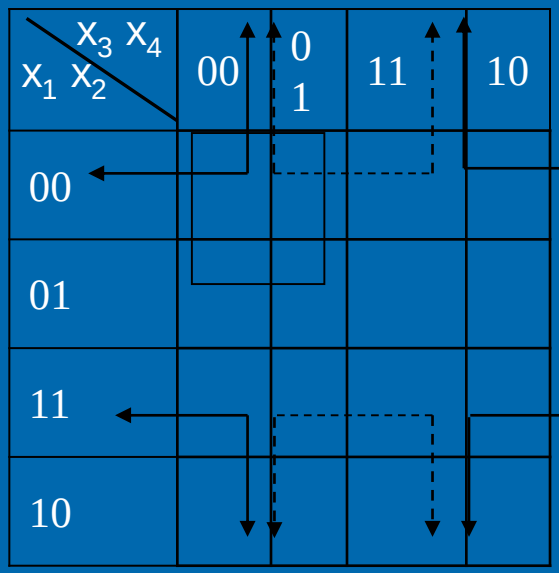
Technique de minimisation.

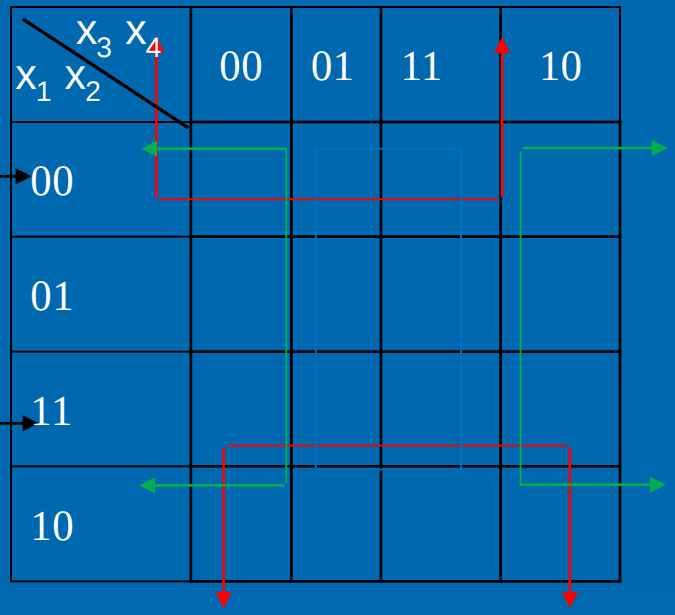
On regroupe les cases adjacentes en puissance de 2 : 1,2,4,8,16 etc….

Exemple pour une table à 4 variables

Regroupement possibles.



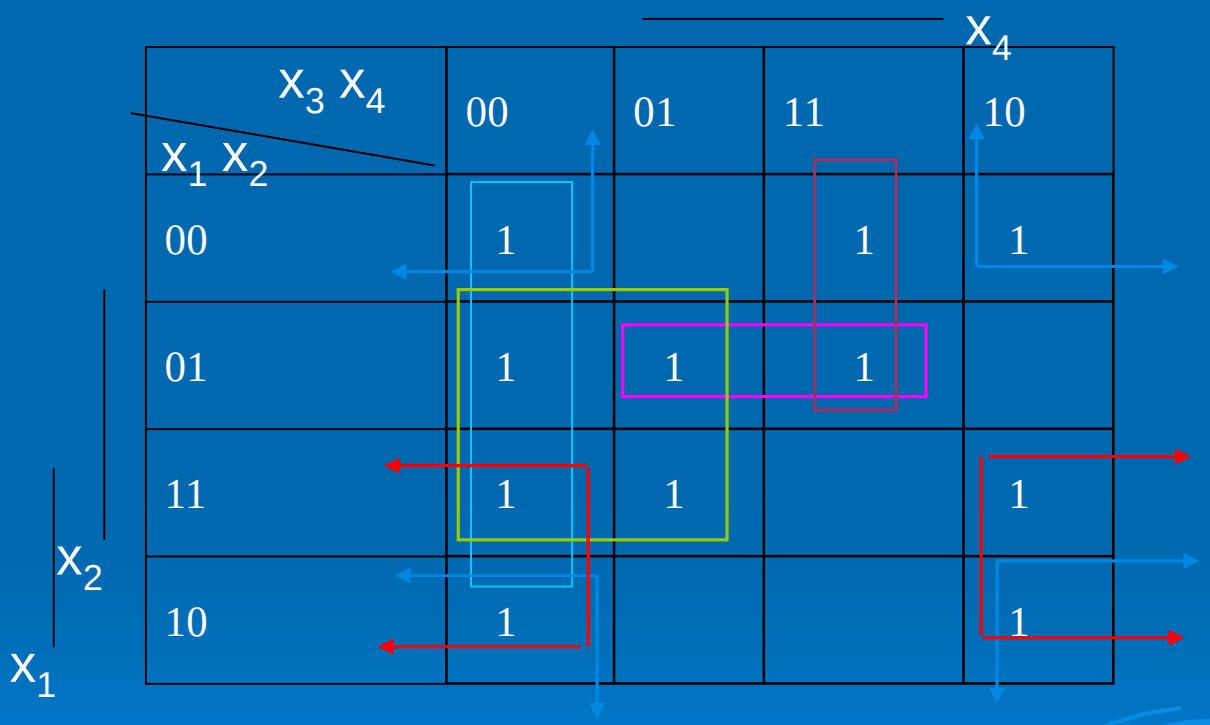




3 - Exemple ;

Soit une fonction logique de 4 variables (x_1 ,x_2, x_3, x_4)définie par son ensemble d’ ouverture.

$$f = R1(0,2,3,4,5,7,8,10,12,13,14)$$



Base première complète

$$f = \bar{x}2\ \bar{x}4 + \bar{x}3\ \bar{x}4 + x2\ \bar{x}3 + x1\ \bar{x}4 + \bar{x}1x2\ x4 + \bar{x}1x3\ x4$$

4 – monôme premier (M.P.)

Tout monôme qui figure dans la fonction après emploi de la méthode de Karnaugh est premier.

5 – monôme premier essentiel (M.P.E.)

c’est un monôme premier qui est le seul à couvrir au moins un sommet de la fonction. .

Exemple :

$$X_2\overline{X}_3 + \overline{X}_1X_3X_4$$

6– Base premier (B.P.)

Écriture de la fonction qui regroupe tous les monôme premier essentiels et non essentiel sil n’en existe qu’une seul.

Exemple :

$$f = \bar{x}_2\,\bar{x}_4 + \bar{x}_3\,\bar{x}_4 + x_2\,\bar{x}_3 + x_1\,\bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2\,x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_3\,x_4$$

Pour réaliser la fonction f, il faut.

$$\left.\begin{array}{l} 3 \text{ portes ET à } 3 \text{ entrées.} \\ 4 \text{ portes ET à } 2 \text{ entrées.} \\ 1 \text{ portes OU à } 7 \text{ entrées} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f$$

7 – Codage de la table de Karnaugh, code binaire réfléchi. (code de Gray).

a) Cas de quatre variables

x_3 x_4

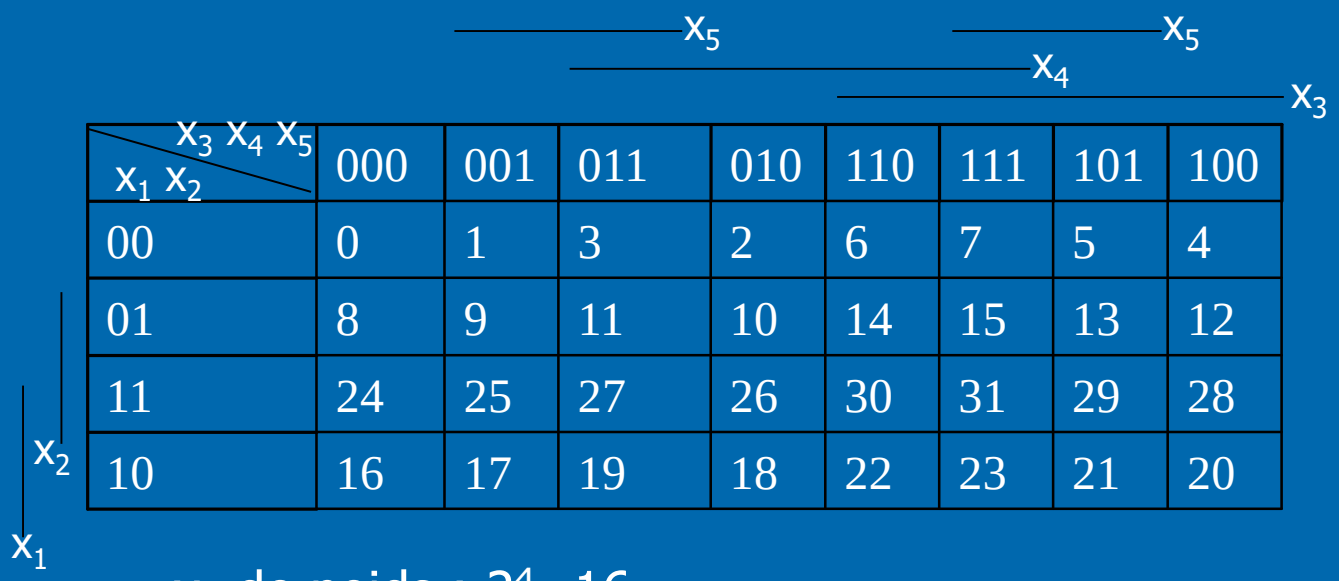
$x_1\,x_2$ \ $x_3\,x_4$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

x_2 x_1

2^4=16 Cases

x_1 de poids : 2^3=8
x_2 de poids : 2^2=4
x_3 de poids : 2^1=2
x_4 de poids : 2^0=1

b) Cas de cinq variables.



x_1 x_2 \ x_3 x_4 x_5	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	3	2	6	7	5	4
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

$2^5=32$ Cases

x_1 de poids : $2^4=16$

x_2 de poids : $2^3=8$

x_3 de poids : $2^2=4$

x_4 de poids : $2^1=2$

x_5 de poids : $2^0=1$